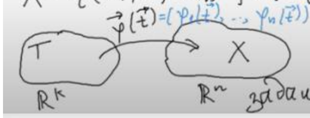
Опр. 1 Пусть ф-ция f определена на мн-ве $X \subset \mathbb{R}^n$, $\vec{a} \in X$, $\vec{a}$ – предельная точка X. Ф-ция f непрерывна в точке $\vec{a}$, если $\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{a}} f(\vec{x}) = f(\vec{a})$.

Опр. 2 (по Гейне) ф-ция f непрерывна в точке $\vec{a}$, если $\forall$ посл-ти $\{\vec{x}^m\}$ аргументов, т.ч. $\vec{x}^m \xrightarrow[m\to+\infty]{} \vec{a}$: $f(\vec{x}^m) \xrightarrow[m\to+\infty]{} f(\vec{a})$.

Опр. 3 (по Коши) ф-ция f непрерывна в точке $\vec{a}$, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon)$, т.ч. $\forall \vec{x} \in B_\delta(\vec{a}) \cap X$: $|f(\vec{x}) - f(\vec{a})| < \varepsilon$

Опр-я 1–3 эквивалентны.

Опр. 6 Пусть ф-ции $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ определены на мн-ве $T \subset \mathbb{R}^k$ и $\varphi_j : T \xrightarrow{на} \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, n$. Обозначим $X = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 = \varphi_1(\vec{t}), \dots, x_n = \varphi_n(\vec{t}), \vec{t} \in T\} \subset \mathbb{R}^n$.



Если на X определена ф-ция $f: X \to Y \subset \mathbb{R}$, то говорят, что на T задана сложная ф-ция $f(\vec{\varphi}): T \to Y$

Обозначим $x_1^m = \varphi_1(\vec{t}^m), \dots, x_n^m = \varphi_n(\vec{t}^m)$, $m \in \mathbb{N}$.

Тогда $\begin{cases} x_1^m \to x_1^0 \\ \dots \\ x_n^m \to x_n^0 \end{cases}_{m\to+\infty} \Leftrightarrow \vec{x}^m \to \vec{x}^0$, $\vec{x}^m = (x_1^m, \dots, x_n^m)$, $\vec{x}^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$

При этом $\vec{x}^m \in X$, $\vec{x}^0 \in X$; f непр-на в точке $\vec{x}^0$ $\Rightarrow f(\vec{x}^m) \xrightarrow[m\to+\infty]{} f(\vec{x}^0)$, где $f(\vec{x}^m) = f(\varphi_1(\vec{t}^m), \dots, \varphi_n(\vec{t}^m))$, $f(\vec{x}^0) = f(\varphi_1(\vec{t}^0), \dots, \varphi_n(\vec{t}^0))$ $\Rightarrow f(\vec{\varphi})$ непр-на в точке $\vec{t}^0$ (опр-е по Гейне)

ч.т.д.

$\exists \vec{c} \in L$: $f(\vec{c}) = \gamma$.

Д-во: Пусть $L = \{(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)), \alpha \le t \le \beta\}$; $(\varphi_1(\alpha), \dots, \varphi_n(\alpha)) = \vec{a}$, $(\varphi_1(\beta), \dots, \varphi_n(\beta)) = \vec{b}$; $L \subset X$.

Рассмотрим ф-цию $g(t) = f(\vec{\varphi}(t)) = f(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$

Она непр-на на $[\alpha, \beta]$ как сложная ф-ция $g(\alpha) = A$; $g(\beta) = B$. Значит, $\forall \gamma \in [A, B]$ (или $[B, A]$) найдется $t_0 \in [\alpha, \beta]$: $g(t_0) = \gamma$.

Обозначим $\vec{c} = (\varphi_1(t_0), \dots, \varphi_n(t_0))$; тогда $\vec{c} \in L$; $f(\vec{c}) = \gamma$.

ч.т.д.

Т. 6 (1-я теор. Вейерштрасса) Пусть f непрерывна на замкнутом ограниченном мн-ве X. Тогда f огр-на на X.

Т. 7 (2-я теор. Вейерштрасса). Пусть f непр-на на замкнутом ограниченном мн-ве X. Тогда она достигает на X своих точных граней.

Опр. 1 Пусть мн-во $X \subset \mathbb{R}^n$ таково, что каждая его точка явл-ся предельной. Ф-ция f равномерно непрерывна на X, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0$, т.ч. $\forall \vec{x}', \vec{x}'' \in X$, $\rho(\vec{x}', \vec{x}'') < \delta$: $|f(\vec{x}') - f(\vec{x}'')| < \varepsilon$.

Т. 1 (Кантор) Пусть f непрерывна на замкнутом ограниченном мн-ве X. Тогда f равн. непр-на на X.

Д-во: Предположим, что f не явл-ся р/н на $X \Rightarrow \exists \varepsilon > 0$, т.ч. $\forall \delta_m = \frac{1}{m}, m \in \mathbb{N}$, $\exists \vec{x}^{m\prime}, \vec{x}^{m\prime\prime} \in X$, $\rho(\vec{x}^{m\prime}, \vec{x}^{m\prime\prime}) < \frac{1}{m}$ но $|f(\vec{x}^{m\prime}) - f(\vec{x}^{m\prime\prime})| \ge \varepsilon$.

Т. 1 (арифм. операции) Пусть f, g определены на мн-ве $X \subset \mathbb{R}^n$; $\vec{a} \in X$, $\vec{a}$ – пред. точка X. Если f и g непрерывны в точке $\vec{a}$, то $f \pm g$, $f \cdot g$ и (если $g(\vec{a}) \ne 0$) $\frac{f}{g}$ непр-ны в т. $\vec{a}$.

Т. 2 (сохр-е знака) Пусть f непр-на в точке $\vec{a}$. Если $f(\vec{a}) > 0$ (< 0), то $\exists \delta > 0$, т.ч. $f(\vec{x}) > 0$ (< 0) $\forall \vec{x} \in B_\delta(\vec{a}) \cap X$.

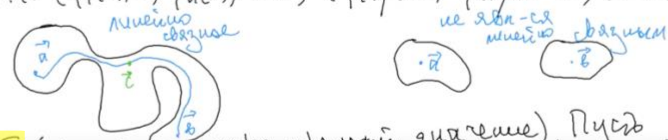
Т. 3 Если f непр-на в т. $\vec{a}$, то $\exists \delta > 0$: f ограничена на мн-ве $B_\delta(\vec{a}) \cap X$.

Т. 4 Пусть каждая из ф-ций $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ непр-на в точке $\vec{t}^0 \in T$. Если ф-ция f непр-на в точке $\vec{x}^0$, где $x_1^0 = \varphi_1(\vec{t}^0), \dots, x_n^0 = \varphi_n(\vec{t}^0)$, то сложная ф-ция $f(\vec{\varphi})$ непр-на в точке $\vec{t}^0$.

Д-во: Рассмотрим произвольную послед-ть $\{\vec{t}^m\}$, $\vec{t}^m \in T$, $m \in \mathbb{N}$; $\vec{t}^m \xrightarrow[m\to+\infty]{} \vec{t}^0$. Тогда $\varphi_1(\vec{t}^m) \xrightarrow[m\to+\infty]{} \varphi_1(\vec{t}^0) = x_1^0$, … $\varphi_n(\vec{t}^m) \to \varphi_n(\vec{t}^0) = x_n^0$

Опр. 7 Непрерывной кривой в $\mathbb{R}^n$ наз-ся мн-во $L = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = \varphi_1(t), \dots, x_n = \varphi_n(t), \alpha \le t \le \beta;\ \varphi_1, \dots, \varphi_n \in C[\alpha, \beta]\}$.

Опр. 8 Мн-во $X \subset \mathbb{R}^n$ наз-ся линейно связным, если любые две точки мн-ва X можно соединить непрерывной кривой L, целиком лежащей в X ($\vec{a}, \vec{b} \in X \Rightarrow \exists L = \{(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)), \alpha \le t \le \beta\}$, т.ч. $(\varphi_1(\alpha), \dots, \varphi_n(\alpha)) = \vec{a}$; $(\varphi_1(\beta), \dots, \varphi_n(\beta)) = \vec{b}$; $L \subset X$).



Т. 5 (прохождение через промежут. значение). Пусть f непр-на на линейно связном мн-ве X. Пусть $\vec{a}, \vec{b} \in X$, $f(\vec{a}) = A$; $f(\vec{b}) = B$. Тогда $\forall \gamma \in [A, B]$ (или $[B, A]$) $\forall$ непр-й кривой $L \subset X$, соединяющей $\vec{a}$ и $\vec{b}$,

Д-во: Предположим, что f не ограничена на X. Тогда $\forall m \in \mathbb{N}$ $\exists \vec{x}^m \in X$: $|f(\vec{x}^m)| > m$. Посл-ть $\{\vec{x}^m\}$ ограничена (т.к. X – ограничено); значит, $\exists$ сх-ся подпосл-ть $\vec{x}^{k_m} \to \vec{x}^0$ (теор. Б.-В.)

Точка $\vec{x}^0$ – предельная точка X; X – замкнуто $\Rightarrow \vec{x}^0 \in X$. Значит, f непр-на в т. $\vec{x}^0 \Rightarrow f(\vec{x}^{k_m}) \to f(\vec{x}^0)$

Но $|f(\vec{x}^{k_m})| > k_m$, т.е. $\{f(\vec{x}^{k_m})\}$ – ББП ?! $\Rightarrow f$ ограничена на X.

ч.т.д.

Рассм. посл-ть $\{\vec{x}^{m\prime}\}$. Она ограничена (т.к. мн-во X ограничено) $\Rightarrow$ из неё можно выделить сход-ся подпосл-ть $\vec{x}^{k_m\prime} \xrightarrow[m\to+\infty]{} \vec{x}_0$. Тогда $\vec{x}^0$ – предельная точка X; мн-во X замкнуто $\Rightarrow \vec{x}^0 \in X$.

Значит, f непр-на в т. $\vec{x}^0 \Rightarrow f(\vec{x}^{k_m\prime}) \to f(\vec{x}_0)$.

Теперь рассм. посл-ть $\{\vec{x}^{k_m\prime\prime}\}$. Поскольку $\rho(\vec{x}^{k_m\prime}, \vec{x}^{k_m\prime\prime}) < \frac{1}{k_m}$, то $\vec{x}^{k_m\prime\prime} \to \vec{x}^0$. Значит, $f(\vec{x}^{k_m\prime\prime}) \to f(\vec{x}^0)$. Получили, что $(f(\vec{x}^{k_m\prime}) - f(\vec{x}^{k_m\prime\prime})) \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0$. Но $|f(\vec{x}^{k_m\prime}) - f(\vec{x}^{k_m\prime\prime})| \ge \varepsilon$?! $\Rightarrow f$ р/н на X.

ч.т.д.